Aufgabe C1 Landesabitur Hessen 2012 GK

Aufgabe 1.1 (2 BE)

X ist die Anzahl der Regentage in einer Woche im Juni.

X ist binomialverteilt mit p = 0,4 und n = 7.

Die Anwendung der Binomialverteilung erfordert 3 Voraussetzungen :

Voraussetzung	Sachzusammenhang
Es gibt nur 2 mögliche Ausgänge	Regentag oder kein Regentag
Die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ausgänge ändern sich nicht	Das Wetter an aufeinanderfolgenden Tagen ist laut Aufgabe unabhängig voneinander p(Regentag) = 0,4
Die zugrundeliegende Bernoulli –Kette ist beliebig lang	Der Beobachtungszeitraum ist beliebig verlängerbar

Daraus folgt $p(X=3) = B(7|0,4|3) = \binom{7}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^4 \approx 0,29$

Aufgabe 1.2 (2 BE)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p(X>1))$

$$p(X>1) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - B(7|0,4|0) - B(7|0,4|1)$$
$$\approx 0,841$$

Aufgabe 1.3 (4 BE)

Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens einen regenfreien Tag“ ist gleich der Gegenwahrscheinlichkeit für „nur Regentage“.

$$\begin{aligned} p(X<n) &= 1 - p(X=n) \\ &= 1 - \binom{n}{n} \cdot 0,4^n \cdot 0,6^0 \\ &= 1 - 0,4^n \end{aligned}$$

Da diese Wahrscheinlichkeit größer als 0,95 sein soll, muss die folgende Ungleichung gelöst werden :

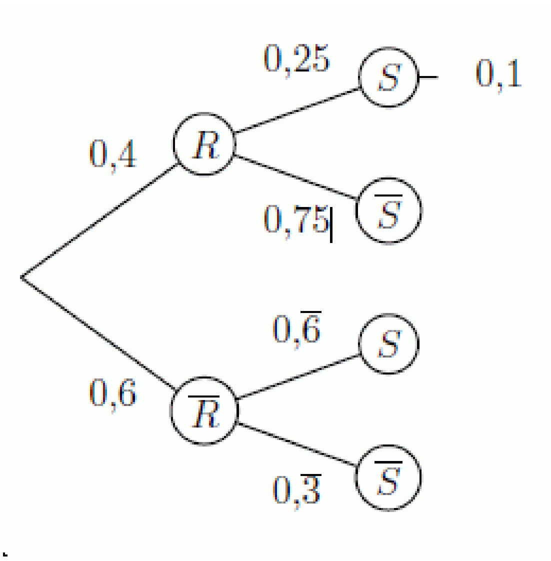
$$
\begin{aligned}
1 - 0{,}4^n &> 0{,}95 && |-1 \\
-0{,}4^n &> -0{,}05 && |\div(-1) \\
+0{,}4^n &< +0{,}05 && \\
n \cdot \log_{10}(0{,}4) &< \log_{10}(0{,}05) && |\div \log_{10}(0{,}4) \\
n &> 3{,}3 &&
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Anzahl ist also n = 4 Tage. Bei dieser Rechnung ist darauf zu achten, dass sich das Ungleichheitszeichen an zwei Stellen umkehrt: Einmal bei der Division durch (-1) und einmal bei der Division durch den Zehner-Logarithmus von 0,4. Zur Erinnerung : Jeder Logarithmus einer Zahl x, mit 0 < x < 1, ist negativ.

Aufgabe 2.1 (4 BE)

Mit R: Regentag und S: Tag mit mind. 8 Stunden Sonnenschein

ergibt sich das folgende Baumdiagramm :



dabei ist $p_R(S) = 0{,}25$ die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Regentag zusätzlich 8 Stunden die Sonne scheint

und

$p_{\overline{R}}(S) = 0{,}\overline{6}$ die Wahrscheinlichkeit, dass an einem regenfreien Tag die Sonne ebenfalls an 8 Stunden scheint

und

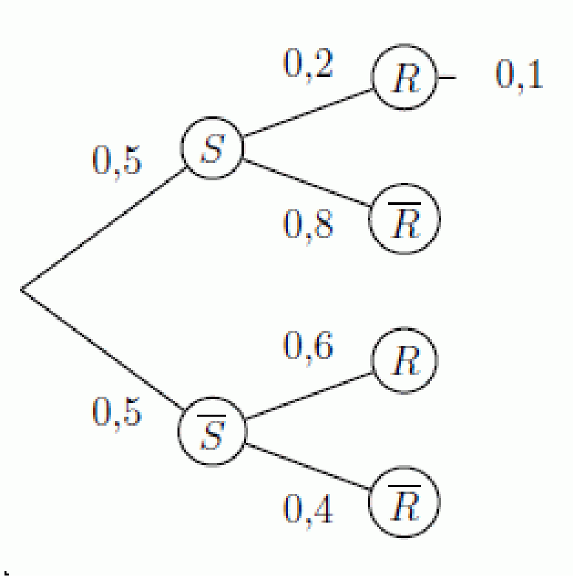
$p(S) = p_R(S) + p_{\overline{R}}(S) = 0{,}5$ ist die totale Wahrscheinlichkeit für S, also die Wahrscheinlichkeit, dass an einem beliebigen Tag die Sonne scheint.

Aufgabe 2.2 (4 BE)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_S(R)$ berechnet sich nach der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \cdot \frac{1}{4}}{0,4 \cdot \frac{1}{4} + 0,6 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

alternativ kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch über ein umgekehrtes Baumdiagramm gefunden werden. Die Wahrscheinlichkeit für S ist ja p(S) = 0,5 (siehe Baumdiagramm und Nenner der obigen Formel) und daraus ergibt sich :



mit $p_S(R) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$

Aufgabe 2.3 (4 BE)

Zuerst ist die Wahrscheinlichkeit p für einen solchen Tag zu bestimmen:

$$p = p(\overline{R}) + p(R \cap S) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,7$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein „schönes Wochenende (3 Tage)“ berechnet sich aus:

$$p(X = 3) = p^3 = 0,7^3 = 0,343$$

Aufgabe 3.1 (3 BE)

X ist binomialverteilt mit p = 0,5 und n = 30

$$\mu = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ Tage}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \approx 2{,}74 \text{ Tage}$$

Aufgabe 3.2 (3 BE)

(1) Die erste Kenngröße gibt die durchschnittliche Anzahl der sonnigen Junitage pro Jahr bezogen auf den Zeitraum von 2001 bis 2010 an.
(2) Die zweite Kenngröße gibt die Varianz der Anzahl der sonnigen Junitage für denselben Zeitraum an.
(3) Die dritte Kenngröße gibt die Standardabweichung der Anzahl der sonnigen Junitage für denselben Zeitraum an.

Die letzten beiden sind Streumaße. Sie beschreiben, wie stark die Anzahlen im Laufe der Jahre variieren.

Aufgabe 3.3 (4 BE)

Der in 3.2 berechnete Durchschnittswert im Stichprobenzeitraum stimmt mit dem in 3.1 ermittelten Erwartungswert fast überein. Die Streumaße sind jedoch in der Stichprobe deutlich höher als die im Modell berechneten Werte. Das Modell der Binomialverteilung ist also nur bedingt geeignet, denn das Wetter an aufeinander folgenden Tagen ist im stochastischen Sinne nicht unabhängig.